MAT 2453 - Cálculo diferencial e integral I
Bacharelado noturno em Matemática aplicada e computacional
1° semestre de 2024
Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri
Monitoras: Lara de Assumpção Maffei Pierobon e Sonia Isabel Renteria Alva
Registro das aulas e exercícios sugeridos

1. Segunda-feira, 4 de março de 2024

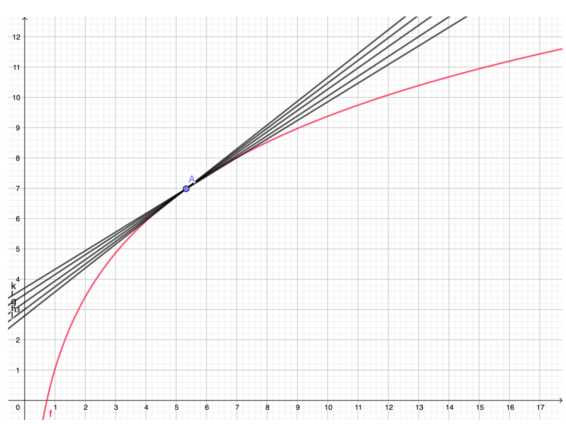
Apresentação do docente, das monitoras e dos alunos que quiseram falar. Apresentação do curso, das formas de avaliação e do trabalho de monitoria. Vejam também o arquivo em pdf "Informações sobre o curso" colocado no sistema edisciplinas.

2. Terça-feira, 5 de março de 2024

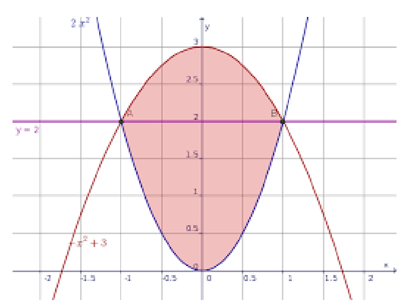
O curso de cálculo diferencial e integral consiste principalmente no estudo das propriedades básicas das funções de uma variável real que assumem valores reais. Centrais no curso serão os conceitos de *derivada* e *integral*.

Estes conceitos foram inventados por Gottfried Leibniz e Isaac Newton no final do século XVII, depois de um longo caminho de estudos e tentativas, feitos a partir da metade do século anterior.

A derivada e a integral respondem ao problemas, respectivamente, do cálculo das tangentes a uma curva e da área de uma região do plano.



Qual é a reta tangente?



É possível calcular a área da região colorida?

Os dois problemas ocuparam os estudos dos filósofos e dos matemáticos da antiquidade (naquelas épocas, não tinha separação nos estudos das várias disciplinas). Depois de períodos de profunda crise da matématica ao longo dos séculos centrais do primeiro milênio, devido a fatores históricos, a matemática ocidental voltou a crescer entre o VIII e o XIII século, a época de ouro da civilisação árabe. Em seguida, um fator crucial para o desenvolvimento das pesquisas a partir de 1500 na Europa foi a invenção da imprensa por Johannes Gutenberg em 1455.[1]

A construção de derivada e integral por Leibniz e Newton tinha uma particularidade curiosa: o método levava a resultados corretos, mas matemáticamente era errado. Em particular, eram usados números *infinitésimos* que não se sabia bem o que queriam dizer. Não eram zero, mas... o que eram? Em outras palavras, os resultados eram corretos, obtidos com métodos que continham erro. Mesmo com o problema da validade teórica da construção, as novas noções de derivada e integral levaram a grandes resultados no século de 1700. Apareceram claramente conceitos como velocidade, tangente a uma curva, área, taxa de variação. Foram finalmente abordados e resolvidos problemas físicos até então inalcançáveis. Os nomes de Johann Bernoulli, Jakob Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauss, entre outros, protagonizaram cem anos de descobertas sensacionais. O começo da revolução industrial, geralmente colocado a partir de 1750 na Inglaterra, tem muito a ver com isso.

A ambiguidade da construção de Leibniz e Newton foi finalmente enfrentada no começo do século de 1800 por Augustin Cauchy. Em 1821 ele publicou o livro *Cours d'Analyse* - uma espécie de Guidorizzi daquela época -, em que ele resumia suas aulas. No livro, Cauchy introduziu um conceito novo: o *limite*. Usando o limite, as definições de derivada integral puderam ser enunciadas cooretamente, sem as ambiguidades de Newton e Leibniz. Cauchy operou uma escolha que poderíamos definir "muito radical", eliminando drasticamente os números infinitesimos que desde então foram "banidos" da matemática.

A noção de número infinitesimo foi exilada, mas não cancelada. O matemático Abraham Robinson, que nasceu alemão e viveu em vários paises, publicou em 1960 o livro *Nonstandar Analysis*. Nesta obra a análise matemática é completamente reformulada. A construção de derivada e integral é dada recuperando os números infinitésimos, desta vez definidos rigorosamente. Assim, Robinson não precisa da introdução e do uso do conceito de limite. Na análise não standard todos os resultados do cálculo diferencial continuam valendo e são redemonstrados. A invenção deste tipo de abordagem ao cálculo diferencial é não menos extraordinária daquela baseada no conceito de limite, que historicamente se consolidou. K. Goedel acreditava que este tipo de matemática ia substituir a abordagem tradicional (eliminando portanto o conceito de limite). Esta previsão não se realizou, por enquanto. Seria interessante investigar porque. Eu não tenho conhecimento dos debates sobre a questão.

Depois do trabalho de Cauchy, um matemático que apesar da sua curta vida deu uma grande contribuição para o cálculo diferencial foi Bernard Riemann que sistematizou a definiçaõ de integral com uma abordagem de ainda hoje leva o nome dele.

É importante, para concluir esta breve e muito incompleta introdução, mencionar Karl Weierstrass (1815-1897), que foi o matemático considerado o "pai da moderna análise matemática". Com a única exceção do Teorema da função implícita, do final do século XIX, os cursos de análise matematicas atuais coincidem com o curso elaborado por Weiestrass na sua carreira de professor.

Portanto, voltando ao nosso curso, a parte inicial será dedicada à introdução do conceito de função, junto com algumas propriedades básicas. Em seguida, será enfrentado o conceito de limite, que carrega um certo grau de dificuldade. Graças ao limite, será possível definir corretamente os conceitos de função contínua, de derivada e de integral de uma função, com as relativas aplicaços.

[1] Formas de impressão mecânicas eram realizadas na China bem antes, a partir do ano 1000, mais ou menos.

Antes de entrar no coração do curso, que começa pelo conceito de função, lembramos algumas noções básicas de lógica elementar, teoria dos conjuntos, números reais.

I. Lógica elementar. Uma demonstração em matatática é uma operação complicada e delicada. Demonstrar uma proposição (o um teorema, que é a mesma coisa) significa verificar que

a partir de uma <u>hipótese</u> A segue uma <u>tese</u> B.

Com uma notação matemática,

$$A \quad \Longrightarrow \quad B.$$

Um exemplo não difícil é dado pela seguinte proposição.

Proposição 1. *Se $x \geq 5$, então $x^2 \geq 20$.*

Demonstração. Os números reais (dos quais iremos falar na próxima aula, sucintamente) são infinitos. Imagine que estejam todos dentro de uma sacola gigante. Eu preciso provar que, **se eu pegar** um número $x \geq 5$, **então** deve ser $x^2 \geq 20$. Ao mesmo tempo, se eu pegar um número $x < 5$, estou considerando um x que não respeita a hipótese, não interessa investigar sobre x^2, pois a hipóthese não está contemplada. Poderíamos objetar: ok, mas $4,5$ é menor de 5 e ao mesmo tempo $(4,5)^2 = 20,25$ é maior de 20. Tudo bem, mas é irrelevante aos fins do teorema. O teorema está dizendo que para todos os infinitos números x que são maiores ou iguais a 5, o quadrado deles é maior o igual a 20. O teorema não está dizendo nada (não está se "comprometendo") sobre os números que não respeitam a hipóthese A.

Dito isso, vamos demonstrando o teorema. Pego um genérico x que seja ≥ 5. Sendo $x > 0$, multiplico os dois lados de $x \geq 5$ por x, obtendo $x \cdot x \geq 5 \cdot x$. Esta é uma propriedade básica dos números reais. Cuidado: é falsa se eu multiplico os lados de uma desigualdade $a > b$ por um número $c < 0$. Aí temos $ac < bc$. Não esqueçam disso quando irão enfrentar inequações.

Agora, multiplico os dois lados de $x \geq 5$ por 5 que é positivo e mantenho a desigualdade: $x \cdot 5 \geq 5 \cdot 5$. Juntando, temos $x^2 \geq 5x > 25 > 20$ e o teorema é provado. □

Exercício 1. Estude a proposção seguinte: *Se $x < 5$, então $x^2 < 20$.* É como dizer: (não A) implica (não B), onde A e B são os da proposição acima. Diga se esta proposição é verdadeira o falsa. Como se faz para provar que uma proposição é falsa?

Exercício 2. Prove a proposção seguinte: *Se $x^2 < 20$ então $x < 5$.* É como dizer: (não B) implica (não A). Observe que esta proposição é idéntica à proposição 1, somente escrita com uma outra linguagem.

Teorema 2. *Se amanhã chover, irei levar o guardachuva.*

O dia seguinte podem se verificar quatro situações:

chove	*levo o guardachuva*
chove	*não levo o guardachuva*
não chove	*levo o guardachuva*
não chove	*não levo o guardachuva*

Se acontecer a primeira situação, o teorema é verdadeiro, porque da hipótese segue a tese. No segundo caso, o teorema é falso, porque da hipótese não segue a tese. Caso se verifiquem a terceira ou a quarta situação, o teorema é verdadeiro. Porque aquilo que é importante não é se eu levo ou não o guardachuva, mas se a hipótese provoca a tese. Se hipótese não é verificada, a tese está liberada de qualquer obrigação. Em outras palavras, o seguinte é um teorema substancialmente diferente do teorema 2.

Teorema 3. *Amanhã irei levar o guardachuva.*

Agora, fica claro entender se o teorema acima é verdadeiro ou falso (dependendo do meu comportamento amanhã). No primeiro teorema, mais difícil, **não se trata de provar se B é verdadeira, mas se A implica B.** A diferença é profunda.

Exercício 3. Observe os dois teoremas seguintes e comente se eles dizem as mesmas coisas (ou seja, se são verificados nos mesmos casos). **Teorema 1:** *Se Maria joga, nosso time de futebol ganha.* **Teorema 2:** *Se Maria não joga, nosso time de futebol não ganha.*

Exercício 4. Escreva a negação da frase seguinte: *Antônio e José são altos acima de 1mt e 80.*

II. Noções básicas de teoria dos conjuntos. O conceito de *conjunto* será pensado como conceito primitivo, ou seja, *um conjunto é uma coleção de elementos.* Não iremos aprofundar a teoria dos conjuntos. Essa maneira de tratar os conjuntos não é correta, mas é prática e ao nível dos nossos objetivos funciona. Quero somente deixar para vocês a observação seguinte: imaginem o conjunto formado pela turma de vocês. Depois imaginem o conjunto de todas as turmas da USP. A turma de vocês é ao mesmo tempo um conjunto e um elemento de um outro conjunto. E assim podemos continuar: o conjunto de todas as turmas da USP é um elemento do conjunto que contém, como elementos, o conjunto de todas as turmas da USP, da UFABC, da UNICAMP. Este último conjunto possui portanto três elementos. Parece tudo tranquilo, mas considere

o conjunto de todos os conjuntos.

Este conjunto não existe. Sua definição leva a uma contradição não resolvível. Leiam por exemplo este texto. O problema é tamém conhecido como Paradoxo de Bertrand Russell.

Se A é um conjunto e a é um elemento de A escrevemos $a \in A$. Por exemplo $1 \in \mathbb{N}$ e $1/2 \notin \mathbb{Z}$.

Definição 4. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é contido em B se cada elemento de A é um elemento de B. Usamos também a expressão A é um *subconjunto* de B, com o símbolo $A \subseteq B$.

Por exemplo o conjunto dos alunos do curso de MAT2453 é um subconjunto dos alunos da USP. É importante saber que todo conjunto possui um subconjunto abstrato, que não contém elementos e é chamado *conjunto vazio*. É denotado pelo símbolo $\emptyset$.

Atenção ao exemplo seguinte que coloco para esclarecer o uso correto dos conceitos acima: o número 1 não é um subconjunto de $\mathbb{N}$, pois é um *elemento* de $\mathbb{N}$. Existe ao mesmo tempo o conjunto formado pelo número 1, denotado por $\{1\}$. Este sim é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Portanto é correto dizer que 1 e $\{1\}$ são duas "entidades" diferentes.

Exercício 5. Seja dado o conjunto $\{1, 2, 3\}$. Determine explicitamente todos seus subconjuntos.

Exercício 6. Seja dado o conjunto $\{1, 2, 3, \{1\}, \{2, 4\}\}$. Determine explicitamente todos seus subconjuntos e todos seus elementos.

3. Quinta-feira, 7 de março de 2024

Definição 5. Dados dois conjuntos A e B, definimos

$$\textit{interesção de } A \text{ e } B: \quad \text{é o conjunto} \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\textit{união de } A \text{ e } B: \quad \text{é o conjunto} \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$\textit{diferença:} \quad \text{é o conjunto} \quad A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Do ponto de vista da notação, $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ significa o conjunto dos elementos x tais que x pertence a A e x pertence a B

Exercício 7. Prove as propriedades distributivas: dados três conjuntos A, B e C,
1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

e as *Leis de De Morgan*: dados três conjuntos A, B e C contidos num conjunto U,

3) $\mathcal{C}_U(A \cup B) = \mathcal{C}_U A \cap \mathcal{C}_U B$,
4) $\mathcal{C}_U(A \cap B) = \mathcal{C}_U A \cup \mathcal{C}_U B$.

Nos itens 3) e 4) acima o símbolo $C_U A$ (pego ele como exemplo para todos os outros) denota o conjunto dos elementos que estão em U, e não estão em A. $C_U A$ é chamado *complementar* de A em U.

Muito importante: o que significa provar que dois conjuntos E e F são iguais? Significa provar que possuem exatamente os mesmos elementos. A definição, colocada desta forma, pode ser um pouco ambigua. De fato, definimos $E = F$ se $E \subseteq F$ e $F \subseteq E$.

Assim, o método para provar que $E = F$ é o seguinte: primeiramente, se deve-se provar que cada elemento de E é também um elemento de F. Depois, deve-se provar que cada elemento de F é também um elemento de E. Desta forma, no primeiro passo se prova que $E \subseteq F$, no segundo que $F \subseteq E$. A consequência é $E = F$.

Em sala de aula foi provado o item 1 do exercício anterior. Vamos ver os detalhes. Chame $S = A \cup (B \cap C)$ e $T = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Passo 1: queremos provar que $S \subseteq T$. Seja $x \in S$ fixado. Temos dois casos: $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. No primeiro caso, há $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ (pois x pertence a A). Assim, claramente $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ou seja, $x \in T$. No segundo caso $x \in B$ e $x \in C$. Portanto $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e, consequentemente, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ou seja, $x \in T$. Desta forma o passo 1 é completado.

Passo 2: se trata de prova que $T \subseteq S$. Seja $x \in T$ fixado. Vamos agora pensar no conjunto A e sua relação com x. Fica óbvio que temos dois casos que se excluem: no primeiro, $x \in A$, no segundo $x \notin A$. Se $x \in A$, claramente $x \in S$ e não temos nada mais a dizer. Se $x \notin A$, sendo que $x \in T$, temos $x \in B$ e $x \in C$; portanto $x \in B \cap C$ o que implica que $x \in B \cap C$, portanto, $x \in S$. O exercício é completamente resolvido.

Exercício 8. Escreva a união e a interseção dos conjuntos A e B da lista seguinte. Diga se vale $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Determine $A \backslash B$ e $B \backslash A$.

O conjunto $A \backslash B$ – chamado diferença entre A e B – é definido como o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. É um conceito diverso do conceito de complementar. Aqui não é necessariário assumir que B esteja contido em A.

1. $A = (0, 1)$, $B = [0, 1]$ **2.** $A = (-\infty, 0)$, $B = [-1, 5]$

3. $A = \left\{ \dfrac{2n}{2n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$, $B = \left\{ \dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

4. $A = (0, 2) \cup (3, 4)$, $B = [2, 3]$ **5.** $A = (-3, 0]$, $B = [-2, 2)$

Nos exercícios acima, estamos considerando alguns "intervalos" de números reais. Os intervalos serão logo apresentados. Contudo, o leitor que não conhece a definição de intervalo, pode pular os relativos itens do exercício. De qualquer forma, por exemplo, o intervalo $[-2, 2)$ é o conjunto dos números reais x tais que $-2 \leq x < 2$. Isso explica o uso dos colchetes "[" e ")" e deveria também permitir a compreensão dos outros intervalos. O intervalo $(-\infty, 0)$ é o conjunto dos números reais x estritamente menores de 0. O uso do símbolo $-\infty$ é somente para este significado. Lembre: $-\infty$ não é um número (não no nosso curso).

Exercício 9. Invente alguns pares de conjuntos A e B e responda às mesmas questões do exercício 8.

O sistema numérico que será utilizado no curso será o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$ é o símbolo. Um *número real* é definido como um *alinhamento decimal, limitado ou não, periódico ou não, com sinal.* O leitor poderá usar também as operações conhecidas de soma o produto nos números reais, assim como a relação de ordenamento que tal sistema possui, e trabalhar sem particular problema com as propriedades algébricas das operações e do ordenamento, que são geralmente conhecidas.

Nos objetivos do curso não entram a definição ou a construção aprofundadas do conjuntos dos números reais. Portanto nos limitaremos aos conceitos intuitivos e simplificados. Consideramos como conhecidos os conjuntos

- $\mathbb{N}$, dos números inteiros não negativos, incluíndo zero. Não todos os livros incluem 0 em $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$, dos números inteiros negativos, positivos, incluíndo zero.
- $\mathbb{Q}$, dos números racionais, ou seja, os quocientes do números inteiros, que podem ser também representados como decimais limitados ou ilimitados periódicos.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais.

Em $\mathbb{R}$ são definidas, como dito acima, duas operações, *soma* e *produto* e uma *relação de ordem* ou *ordenamento.* As operações verificam algumas propriedades importantes, que são bem conhecidas e que não vamos demonstrar. Elas são as propriedades comutativa, associativa, distributiva, e as relações entre as duas operações e o ordenamento. Veja-se os vários "intermezzo" nestas e nas próximas aulas.

O conjunto $\mathbb{Q}$ possui também as duas operações de soma e produto e a mesma relação de ordem. Por isso $\mathbb{Q}$ foi uma base numérica para a matemática antiga de toda a área do Mediterrâneo, da região babilonês até a Índia. Infelizmente a escola pitagórica descobriu que a medida da diagonal do quadrato de lado 1 não pode ser calculada em $\mathbb{Q}$. Em outras palavras *não existe nenhum número em $\mathbb{Q}$ cujo quadrado seja 2.*

Proposição 6. *Não existe nenhum número em $\mathbb{Q}$ cujo quadrado seja 2.*

Antes de propor a demonstração, observe o seguite: seja dado um número racional $r = p/q$, onde p, q são inteiros e $q \neq 0$. Se p e q têm um fator comum m, podemos escrever

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\frac{p'm}{q'm}\right)^2 = \left(\frac{p'}{q'}\right)^2$$

Se, por outro lado, p e q não têm fatores comuns, dizemos que são *primos entre si.* Portanto, a proposição acima pode ser reformulada de forma equivalente. Além disso, se p e q são dois números inteiros quaisquer, com $q \neq 0$, há

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\frac{-p}{q}\right)^2 = \left(\frac{p}{-q}\right)^2 = \left(\frac{-p}{-q}\right)^2.$$

Portanto é suficiente trabalhar com números positivos, reformulando a propsição da forma seguinte.

Teorema 7. *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$, primos entre si, com $q \neq 0$. Então, $(p/q)^2 \neq 2$.*

Demonstração. Procedemos por contradição. Suponhamos que exista $r = p/q$, onde p, q são inteiros e primos entre si, tal que $(p/q)^2 = 2$. Então, há $p^2/q^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Isso implica que p^2 é par, ou seja, contém o fator 2. Portanto, também p contém o fator 2 (*prove este fato como exercício*). Assim, podemos escrever $p = 2m$, onde m é inteiro. Isso implica que

$$4m^2 = 2q^2, \qquad i.e., \qquad 2m^2 = q^2.$$

Por isso, q^2 e portanto q são pares. Mas este fato diz que p e q têm um fator comum, coisa que é contrária à hipótese inicial. E isso é contraditório. Somente resta dizer que, para todo $r = p/q$, onde p, q são inteiros e primos entre si, temos $(p/q)^2 \neq 2$. $\square$

4. Segunda-feira, 11 de março de 2024 e
5. Terça-feira, 12 de março de 2024

O "intermezzo" seguinte é para o leitor curioso e pode ser pulado sem prejuizo na compreensão do resto.

Intermezzo 1: as propriedades de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ verificam as propriedades algébricas seguintes. Na notação coloco somente $\mathbb{R}$ para deixar tudo mais leve.

- S1) *Propriedade comutativa da soma*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$;
- S2) *Propriedade associativa da soma*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- S3) *Existência do elemento neutro da soma*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ e 0 é dito *elemento neutro da soma*;
- S4) *Existência do oposto*: $\forall a \in \mathbb{R}$ existe um elemento de $\mathbb{R}$, b, dito *oposto* de a, tal que $a + b = 0$. Este oposto b pode ser denotado por $-a$ e a operação $a + (-a) = 0$ pode ser escrita simplesmente $a - a = 0$.

- P1) *Propriedade comutativa do produto*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$;
- P2) *Propriedade associativa do produto*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$;
- P3) *Existência do elemento neutro do produto*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ e 1 é dito *elemento neutro do produto*;
- P4) *Existência do inverso*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe um elemento de $\mathbb{R}$, b tal que $a \cdot b = 1$; b é dito *inverso* de a e pode ser escrito como $1/a$.

A *propriedade distributiva* liga soma e produto:

- SP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b)c = ac + bc$.

Em $\mathbb{R}$ é definida uma relação de ordem. Em geral, uma *relação de ordem* em um conjunto (também chamada *ordenamento*) é uma relação binária, ou seja, uma lei que associa uma informação a cada par de elementos do conjunto. No caso da relação de ordem, a cada par de elementos a e b do conjunto C investigado o ordenamento associa a informação $a \leq b$, ou seja a é menor o igual a b, ou também *escrevo a à esquerda de b.* O que significa na prática? Pego um conjunto C de três elementos: uma banana, uma pera, uma laranja. Defino um ordenamento em C dizendo que banana $\leq$ pera, pera $\leq$ laranja, laranja $\leq$ banana. Esta relação tem uma utilidade? Não sabemos por enquanto.

Não todas as relações binárias são ordenamentos. Uma relação de ordem é corretamente definida, num conjunto C, se verifica as três propriedades seguintes:

O1) (propriedade reflexiva) $a \leq a$, para todo $a \in C$;
O2) (propriedade antisimétrica) se $a \leq b$ e $b \leq a$, antão, $a = b$;
O3) (propriedade transitiva) se $a \leq b$ e $b \leq c$, antão, $a \leq c$.

Voltando a $\mathbb{R}$, a relação $a \leq b$ **é** uma relação de ordem. O leitor pode verificar usando simplesmente (sem muita sofisticação) o conhecimento básico sobre "$\leq$".

O ordenamento em $\mathbb{R}$ se relaciona às operações de soma e produto graças às duas propriedades seguintes:

OS) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$;
OP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$, se $a \leq b$, então $ac \leq bc$.

Exercício 10. A OP acima é muito importante. Esquecer ela leva a erros ingênuos. Como exercício, mostre com um o dois exemplos que a OP é falsa se c for negativo.

Exercício 11. A relação acima entre pera, banana e laranja não é de ordem.

O símbolo $a < b$ deve ser pensado como $a \leq b$ e $a \neq b$.

Exercício 12. Dê exemplos, da vida real, de relações de ordem e de relações que não são de ordem.

Exercício 13. Prove as propriedades seguintes, *usando unicamente as 11 propriedades de soma produto e ordenamento, aplicadas agora aos números reais e não somente aos racionais:*

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$;
2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow -a < 0$ (onde $-a$ denota o oposto de a);
3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ e $b < 0$, então $ab < 0$;
3b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$;
3c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a < 0$ e $b < 0$, então $ab > 0$;
4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $c < 0$, se $a \leq b$, então $ac \geq bc$;
5) $\forall a, b, \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$ se e somente se $a^2 \leq b^2$.
6) $\forall a, b, \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$ se e somente se $1/a \geq 1/b$;
7) nos itens 4,5,6 vale a desigualdade estrita na tese se for verificada na hipótese?
8) dado $a \in \mathbb{R}$, prove que $-1 \cdot a$ é o oposto de a (onde -1 denota o oposto de 1).

O que exatamente pede o exercício acima? Parece estranho provar que $a \cdot 0 = 0$, sendo que todo mundo sabe este fato. A questão é: prove os itens acima sem nunhuma abordagem intuitiva, mas usando como ferramenta as 11 propriedades. Dito de outra forma: imagine que $\mathbb{R}$ seja um conjunto absolutamente abstrato em que existem duas operações chamadas soma e produto e uma relação de ordem, que verificam as 11 propriedades. Assim imagine que 0 e 1 sejam dois números abstratos (que poderiam ser chamados Mônica e Magali) que são os elementos neutros de soma e produto. Suponha também (importante) que os elementos neutros de soma e produto seja únicos. A partir daí, faça o exercício acima.

Voltando a $\mathbb{R}$, principal diferença entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ é uma propriedade importante que $\mathbb{R}$ verifica e $\mathbb{Q}$ não. Se chama propriedade ou axioma de continuidade. Têm várias possibilidades equivalentes para apresentar a propriedade de continuidade. Será escolhida uma delas, apresentada com calma na aula do dia 29.3.

Fim do intermezzo.

O conjunto $\mathbb{R}$ verifica uma propriedade crucial, usualmente chamada *Axioma de continuidade*. $\mathbb{Q}$ não satisfaz esta propriedade. Para apresentá-la precisamos de alguns conceitos preliminares.

Definição 8. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio.

(1) Um número real M é dito *majorante* de E se $x \leq M$ para todo $x \in E$.
(2) Um número real m é dito *minorante* de E se $x \geq m$ para todo $x \in E$.
(3) Se um majorante M pertence a E, é chamado de *máximo* de E, em símbolos é $\max E$.
(4) Se um minorante m pertence a E, é chamado de *mínimo* de E, em símbolos é $\min E$.
(5) Em outras palavras, o *máximo* de um conjunto E é o elemento maior, se existe, enquanto o *mínimo* é o elemento menor, se existe.
(6) E é dito *limitado superiormente* se admite pelo menos um majorante.
(7) E é dito *limitado inferiormente* se admite pelo menos um minorante.
(8) E é dito *limitado* se é limitado superiormente e inferiormente.

Exercício 14. De acordo com o item 3 da definição acima, suponha que um conjunto E possua máximo. Prove que é único.

Exercício 15. Determine um ou mais majorantes e minorantes dos conjuntos abaixo. Ou, diga se alguns conjuntos não possuem majorantes ou minorantes.

$$(5,7) \qquad [-3,+\infty)$$

$$[-6,2)\cup(2,4] \qquad (0,3]\cup[3,4]$$

$$\left\{1-\frac{1}{n},\ n\geq 1\right\}\cup\left\{1+\frac{1}{n},\ n\geq 1\right\} \qquad \bigcup_{n\geq 2}\left(-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\{x\in\mathbb{Q} : x^2<3\} \qquad \left\{\frac{2n}{n^2+3},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1\right\} \qquad \left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1\right\}\cup\{0\}$$

$$\bigcap_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right] \qquad \bigcup_{n\geq 1}\left(n,n+\frac{1}{n}\right]$$

Exercício 16. Determine todos os pontos dos conjuntos seguintes.

$$\bigcap_{n\geq 1}\left[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right] \qquad \bigcup_{n\geq 1}\left(1,1+\frac{1}{n}\right]$$

Agora colocamos dois conceitos entre os mais importantes de toda a análise matemática.

Definição 9. Se E é limitado superiormente, definimos *supremo* de E, $\sup E$, o mínimo dos majorantes; se E é limitado inferiormente definimos *ínfimo* de E, $\inf E$, o máximo dos minorantes. Se E é ilimitado superiormente escrevemos $\sup E=+\infty$, se E é ilimitado inferiormente escrevemos $\inf E=-\infty$.

Observação 10. Cuidado: $+\infty$ e $-\infty$ não devem ser tratados como números (ainda menos como os números maiores e menores de todos). Se trata de símbolos usados para escrever e falar com maior rapidez. Em alguns casos, $+\infty$ e $-\infty$ podem sim ser considerados números, mas se trata de áreas avançadas da matemática, que vocês podem procurar se tiverem curiosidade, mas não entrarão nesse curso.

Chegamos finalmente à propriedade que fundamenta toda a análise matemática moderna.

Propriedade (ou axioma) de continuidade: *um conjunto de números reais, limitado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo) em* $\mathbb{R}$.

A demonstração, não trivial, não é um objetivo do nosso curso.

Exercício 17. Determine (se existirem) sup e inf de

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n^2}, \ \text{ onde } \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2 \right\}.$$

Diga se A possui máximo e mínimo.

Para abordar o exercício, precisamos primeiramente observar o conjunto sem pressa e tentar entender como é feito, pelo menos superficialmente. É intuitivo dizer que 1 é o mínimo, enquanto 2 parece ser o supremo sendo que $2 - \frac{1}{n^2}$ se aproxima de 2 quando n é muito grande. Contudo, essas conjeturas devem ser provadas.

Começamos pelo lado esquerdo de A. Observamos que $1 \in A$; de fato, se escolhemos $n = 1$, há $1 = 2 - \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{1}{1^2}$. 1 é também minorante de A. Se $n > 1$, temos $n^2 > 1$ e portanto $\frac{1}{n^2} < 1$. Isso implica que $2 - \frac{1}{n^2} > 2 - 1 = 1$. Ao mesmo tempo, não temos minorante de A maiores de 1. De fato, seja $c > 1$ fixado, ou seja c maior de 1, onde 1 è pensado como minorante. Pode-se pensar agora que 1 é elemento de A; portanto $c > 1$ implica que c não é minorante de A. Concluimos que nenhum número > 1 pode ser minorante da A, ou seja, 1 é o máximo dos minorantes e portanto é o ínfimo.

Observe que, dado um conjunto qualquer B, se s é minorante de B e $s \in B$, então s é ínfimo e mínimo ao mesmo tempo. Analogamente, se S é majorante de B e $S \in B$, então s é supremo e máximo ao mesmo tempo.

Vamos agora para o "lado direito" de A. Vamos provar que $2 = \sup A$. Observe primeiro que 2 é majorante de A. Isso é fácil: todo elemento de A é da forma $x = 2 - \frac{1}{n^2}$ que é claramente menor de 2. Agora, queremos mostrar que 2 é o mínimo dos majorantes. Ou seja, que qualquer número $c < 2$ não pode ser majorante. Seja portanto fixado $c < 2$. O número $2 - c$ é positivo. Sabemos que o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado e portanto seja $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{n} > \frac{1}{\sqrt{2-c}}$. Isso implica $\overline{n}^2 > \frac{1}{2-c}$ e portanto $\frac{1}{\overline{n}^2} < 2 - c$. Assim, há $2 - \frac{1}{\overline{n}^2} > c$; esta fato significa que c não é majorante de A. Em conclusão $\sup A = 2$.

Observe que A possui mínimo igual a 1 e não possui máximo. O supremo, em um certo sentido, é como se fosse um substituto do máximo quando ele não existir.

Nos exercícios sobre a determinação de supremo e ínfimo de conjuntos é muito útil usar a caracterização da noção de supremo e ínfimo tratada no teorema aqui em baixo.

Teorema 11. *Dado um subconjunto E de $\mathbb{R}$, um número M é o supremo de E se e somente se satisfaz as duas propriedades seguintes:*

(1) *M é majorante de E,*
(2) *para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in E$ tal que $M - \varepsilon < a$.*

Observe o enunciado do teorema acima. Diversamente da Proposição 6, aqui não temos um enunciado de tipo "A implica B". Há a ser provado que "A é verificado se e somente se B é". Se trata de provar, portanto que "A implica B" e "B implica A". Um enunciado deste tipo é por exemplo o seguinte: *um número real*

x pertence ao intervalo aberto $(-2,2)$ (A) se e somente se x^2 é menor de 4. Para provar uma proposição deste tipo se trata de provar que

(1) A implica B,
(2) B implica A.

As duas etapas acima são separadas. São, de fato, dois teoremas separados.

Exercício 18. Escreva a demonstração do Teorema anterior.

Exercício 19. Escreva o enunciado e a demonstração do análogo teorema realtivo ao ínfimo de um conjunto.

Observação 12. Na matemática, palavras semelhantes podem ter significados muito distantes. Um conjunto é dito *finito* se possui um número finito de elementos. Portanto, conjunto finito e conjunto limitado são duas coisas bem diferentes.

Observação 13. Se os números irracionais não tivessem sido descobertos e coomprendidos, nosso universo numérico seria somente o conjunto $\mathbb{Q}$. Aqui não seria verificada a propriedade de continuidade. Prove este fato como exercício e veja como está conectado ao fato de que, por exemplo, não existe nenhum racional cujo quadrado seja 2.

O exercício seguinte foi um pouco antecipado em sala de aula. Deixo aqui como curiosidade.

Exercício 20. Imagine que você conheça $\mathbb{Q}$ mas não os irracionais. Ou seja conhece a dificuldade do cálculo da diagonal do quadrado de lado 1. Usando o conceito di sup e inf, como poderia ser definido o número $\sqrt{2}$?

Uma consequência da propriedade de continuidade é o seguinte importantíssimo resultado, que é intuitivo, mas cuja demonstração deve ser feita. Este resultado não foi tratado em sala de aula. Embora ele seja válido também para o conjunto $\mathbb{Q}$, a demonstração, no caso de $\mathbb{R}$ pode ser obtida como consequência do axioma da continuidade. Vamos somente dar o enunciado sem demonstração.

Teorema 14. (**Propriedade – ou Axioma – de Arquimédes.**) *Dados dois números positivos a e b, existe um inteiro N tal que $a \cdot N > b$.*

Exercício 21. Determine o supremo e o ínfimo dos conjuntos seguintes e, se existem, o máximo e o mínimo

$$(2,3) \qquad [0,+\infty)$$

$$[-5,1) \cup (1,4] \qquad (0,3] \cup [3,5]$$

$$\left\{1-\frac{1}{n},\ n \geq 1\right\} \cup \left\{1+\frac{1}{n},\ n \geq 1\right\} \qquad \bigcup_{n\geq 2}\left(-\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{n}\right]$$

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \qquad \left\{\frac{2n}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\} \qquad \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\} \cup \{0\}$$

Observação 15. O leitor que já conhece o conceito de limite poderia perguntar (e em sala de aula às vezes acontece) se é possível abordar alguns desses exercícios usando o conceito de limite. A resposta é: absolutamente não. A razão é a seguinte: se eu digo que por exemplo no caso dos dois últimos itens do exercício 21 $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, a objeção é imediata: qual é a definição de limite? e porque $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$? A demonstração da validade do limite acima é, de fato, filha da resolução do exercício pela definição de majorante/minorante, supremo/ínfimo. Usar o limite seria como usar um fato $\mathcal{A}$ para provar o mesmo $\mathcal{A}$ (círculo vicioso).

Exercício 22. (a) O leitor prove, como feito em sala de aula, que não existe nenhum número racional cujo quadrado é 2 (ou seja, refaça autonomamente a demonstração). (b) Prove que que não existe nenhum número racional cujo quadrado é 3.

Exercício 23. Suponhamos de trabalhar somente em $\mathbb{Q}$, ou seja, suponhamos que $\mathbb{R}$ não exista. Seja $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Prove que $\inf A$ não existe.

Exercício 24. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Prove que entre a e b existem pelo menos um número racional e um número irracional. O significado do exercício é observar que entre dois números reais, distintos mas “muito próximos” (apesar do fato de que “muito próximos” não é claro o que significa) temos infinitos irracionais e infinitos racionais.

Exercício 25. Prove que, dados dois números racionais r e s a soma $r + s$, é racional. Usando este simples fato, prove que, se $r \in \mathbb{Q}$ e $a \notin \mathbb{Q}$, $a + r$ não é racional. Se a e b são irracionais, que podemos dizer sobre a soma deles? É sempre irracional?

Observação final. A construção dos números reais, que tem em Georg Cantor e Richard Dedekind seus maiores, mas não únicos, protagonistas, pode ser feita de duas formas: a via construtiva e a via axiomática. A via construtiva parte da definição dos números naturais, tudo menos que fácil[2], se estende aos inteiros relativos, depois aos racionais e termina com os reais com a difícil tarefa de definir rigorosamente os números que “tampam os infinitos buracos” deixados por $\mathbb{Q}$ que não sabe resolver a equação $x^2 = 2$ e muitas muitas outras.

Alguns exercícios sobre os temas tratados até agora.

Exercício 26. Escreva a negação das frases seguintes (não é importante se elas são verdadeiras ou falsas):

a). Para todo x existe y tal que para todo z temos $x + y = z$.
b). Existe x tal que para todo y há $y^2 > x$ ou existe z tal que $x < z$.
c). Para todo x que verifica $x^2 > 2$ existe y tal que para todo z há $y^2 < x + z$.

O exercício acima é importante porque ajuda a ter mais confiança com os processos lógicos. Quando se tratará de provar que um limite não existe ou uma função é descontínua, será muitas vezes necessário negar a definição de limite ou a de continuidade.

Exercício 27. Dados os pares A, B, de conjuntos em baixo, determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

[2]Veja-se, em particular o trabalho de Giuseppe Peano.

1. $(0,2)$; $(1,3)$
2. $(-\infty,3]$; $(-\infty,1)$
3. $[-1,0]$; $(0,1]$

Exercício 28. Um outro tipo de relação em um conjunto, tão importante quanto um (possível) ordenamento é uma *relação de equivalência*. Uma relação entre os elementos de um conjunto E, que podemos denotar por $a \sim b$, é de equivalência se verifica as três propriedades seguintes:

- Reflexiva: $a \sim a$,
- Simétrica: se $a \sim b$, então $b \sim a$,
- Transitiva: se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Verifique se as seguintes são relações de equivalência em $\mathbb{R}$.

$xy \leq 0$	$xy \geq 0$	$xy > 0$
$x^2 = y^2$	$x \geq y$	$x = y$
$x - y$ é inteiro	$x + y$ é inteiro	$x(1+y^2) = y(1+x^2)$
$x(1-y^2) = y(1-x^2)$	$x - y \in \mathbb{Q}$	$x - y \notin \mathbb{Q}$.

Exercício 29. Determine supremo e ínfimo do conjunto seguinte:

$$\left\{x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] : x = \frac{m}{2^n}, m \text{ e } n \text{ inteiros positivos}\right\}.$$

Exercício 30. Determine supremo e ínfimo dos conjuntos seguintes e diga se o supremo e o ínfimo pertencem aos conjuntos (neste caso seriam também máximo e mínimo):

$$\left\{\frac{3n-2}{2n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\} \qquad \left\{-n^2 + 22n + 10, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{n^2 - 5n + 3, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\} \qquad \left\{\frac{t+1}{t-2}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}, t > 2\right\}$$

$$\mathbb{N} \cup \left\{-\frac{1}{n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\} \qquad \left\{\frac{(-1)^n}{n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{\frac{n^2}{n+3}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\right\}$$

Intermezzo 2: abordagem axiomática para definir $\mathbb{R}$

Na apéndice seguinte, fora da ementa do nosso curso (fiquem tranquilos), coloco um resumo da abordagem axiomática. Acho que possa despertar uma curiosidade. O que é uma abordagem "axiomática"? Os números reais foram construidos, até a metade do século de 1800, de forma intuitiva. O primeiro conjunto a ser considerado é $\mathbb{N}$, depois foram colocados os números racionais positivos, presentes já na antiguidade e, ao longo da metade do milênio passado, os números racionais negativos, obtendo $\mathbb{Q}$ e destacando os inteiros $\mathbb{Z}$. Os irracionais causavam bastante dor de cabeça. A construção dos reais de forma rigoraosa, apareceu na segunda metade do século de 1800, pelas obras, como já dito antes, de Cantor e Dedekind.

Todavia, tem um problema: o ponto inicial, os números inteiros positivos, como são definidos? de forma intuitiva? isso é correto? a questão é complexa. Uma resposta foi dada pela construção de Giuseppe Peano, matemático italiano do final do século XIX. A construção de $\mathbb{N}$ feita por ele é ainda objeto de discussão.

Uma outra abordagem é completamente diferente. Imagina um conjunto completamente abstrato, que podemos chamar aqui de A. Em A definimos duas operações, soma e produto, um ordenamento e um axioma (agora sim: um axioma de verdade) de continuidade. Existe um conjunto assim? sim, e coincide com $\mathbb{R}$ obtido com o método tradicional. Podemos começar.

Na definição seguinte, o leitor deve fazer um esforço: "esquecer" os conhecimentos que tem sobre os números e pensar no $\mathbb{R}$ como num conjunto "abstrato", encontrado aqui pela primeira vez. Ele será definido pelas propriedades que são aqui dadas como axiomas. O leitor, em outras palavras, deve imaginar que está encontrando os números (qualquer tipo de número) aqui pela primeira vez na sua vida.

Definição axiomática de $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$, dito dos "números reais", é um conjunto onde são definidas duas operações, *soma* e *produto*, uma *relação de ordem* e um *axioma de continuidade*. A soma é uma correspondência que a cada par de elementos a e b de $\mathbb{R}$ associa um elemento de $\mathbb{R}$, denotado pelo símbolo $a + b$, e que deve verificar as propriedades seguintes:

S1) *Propriedade comutativa da soma*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$;
S2) *Propriedade associativa da soma*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$;
S3) *Existência do elemento neutro da soma*: existe um único elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 0, tal que, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ e 0 é dito *elemento neutro da soma*;
S4) *Existência do oposto*: $\forall a \in \mathbb{R}$ existe um elemento de $\mathbb{R}$, b, dito *oposto* de a, tal que $a + b = 0$. Este oposto b pode ser denotado por $-a$ e a operação $a + (-a) = 0$ pode ser escrita simplesmente $a - a = 0$.

Analogamente, o produto é uma correspondência que a cada par de elementos a e b de $\mathbb{R}$ associa um elemento de $\mathbb{R}$, denotado pelo símbolo $a \cdot b$, e que deve verificar as propriedades seguintes:

P1) *Propriedade comutativa do produto*: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$;
P2) *Propriedade associativa do produto*: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$;
P3) *Existência do elemento neutro do produto*: existe um único elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 1, tal que, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ e 1 é dito *elemento neutro do produto*;
P4) *Existência do inverso*: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe um único elemento de $\mathbb{R}$, b tal que $a \cdot b = 1$; b é dito *inverso* de a e pode ser escrito como $1/a$.

A *propriedade distributiva* liga soma e produto:

SP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b)c = ac + bc$.

Em $\mathbb{R}$ é definida uma relação de ordem. Em geral, uma *relação de ordem* em um conjunto (também chamada *ordenamento*) é uma relação binária, ou seja, uma lei que associa uma informação a cada par de elementos do conjunto. No caso da relação de ordem, a cada par de elementos a e b do conjunto C investigado associa a informação $a \leq b$, ou seja a é menor o igual a b, ou também *escrevo a à esquerda de b*. O que significa na prática? Pego um conjunto C de três elementos: uma banana, uma pera, uma laranja. Defino um ordenamento em C dizendo que banana $\leq$ pera, pera $\leq$ laranja, laranja $\leq$ banana. Esta relação tem uma utilidade? Não sabemos por enquanto. É um ordenamento?[3]

Não todas as relações binárias são ordenamentos. Uma relação de ordem é corretamente definida, num conjunto C, se verifica as três propriedades seguintes:

(1) (propriedade reflexiva) $a \leq a$, para todo $a \in C$;
(2) (propriedade antisimétrica) se $a \leq b$ e $b \leq a$, antão, $a = b$;
(3) (propriedade transitiva) se $a \leq b$ e $b \leq c$, antão, $a \leq c$.

Voltando a $\mathbb{R}$, ele é um conjunto onde é definido um ordenamento que se relaciona às operações de soma e produto graças às duas propriedades seguintes:

OS) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$;
OP) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$, se $a \leq b$, então $ac \leq bc$.

O símbolo $a < b$ deve ser pensado como $a \leq b$ e $a \neq b$.

Exercício 31. Dê exemplos, da vida real, de relações de ordem e de relações que não são de ordem.

[3]Não.

Exercício 32. Provar, usando as propriedades acima dos números reais, as propriedades seguintes:

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$;
2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Rightarrow -a < 0$;
3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ e $b < 0$, então $ab < 0$;
3b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$;
3c) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se $a < 0$ e $b < 0$, então $ab > 0$;
4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se $c < 0$, se $a \leq b$, então $ac \geq bc$;
5) $\forall a, b, \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$ se e somente se $a^2 \leq b^2$.
6) $\forall a, b, \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$ se e somente se $1/a \geq 1/b$;
7) nos itens 4,5,6 vale a desigualdade estrita na tese se éverificada na hipótese?
8) dado $a \in \mathbb{R}$, prove que $-1 \cdot a$ é o oposto de a.

O leitor pode observar que se trata do mesmo exercício colocado nas páginas anteriores.

O exercício acima pode desorientar, parecendo óbvio. De fato, queremos que as propriedades acima sejam provadas *só usando as 11 propriedades algébricas introduzidas acima em* $\mathbb{R}$*, que deve ser pensado, como já foi dito, como um conjunto abstrato.*

Exercício 33. Dado um conjunto abstrato que admite as duas operações de soma e produto e uma relação de ordem tal que as 11 propriedades acima sejam verificadas, prove que 0 e 1 são necessariamente diferentes. Prove que a soma e o produto não podem ser a mesma operação. Prove que não podemos ter dois elementos neutros da soma e prove que não podemos ter dois elementos neutros do produto. Este inteligente exercício foi sugerido por alguns alunos do curso de Análise Real de 2018.

Pode ser provado que $\mathbb{Q}$ é um conjunto onde podem ser introduzidas as operações de soma e produto e a relação de ordem tais que as onze propriedades acima sejam verificadas. A demonstração disso levaria um tempo.

Vamos agora introduzir o axioma de continuidade, aquilo que diz que $\mathbb{R}$ (se existir) não pode ser $\mathbb{Q}$. Ou seja, se existir um conjunto abstrato, que estamos chamando de $\mathbb{R}$ que admite uma soma, um produto e um ordenamento com as onze propriedades acima e que verifica também o próximo axioma de continuidade, ele não pode ser $\mathbb{Q}$.

Definição 16. Dados dois números reais a e b, é dito *intervalo* de *extremos* a e b cada um dos conjuntos seguintes:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

O primeiro e o quarto dos intervalos anteriores são ditos rispectivamente *fechado* e *aberto.* Não esquecemos os intervalos

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

O primeiro e o terceiro são *fechados*, enquanto o segundo e o quarto são *abertos.*

Como o leitor sabe desde os cursos de Cálculo, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não denotam elementos do conjunto $\mathbb{R}$, mas o símbolo $(-\infty, b)$, por exemplo, denota o intervalo dos números de $\mathbb{R}$ menores de b.

Exercício 34. Prove que o conjunto $\mathbb{R}$ possui infinitos números maiores de zero (que podemos chamar *positivos*). Use unicamente as 11 propriedades que definem $\mathbb{R}$ e eventualmente consequências delas.

Exercício 35. Dado qualquer $b \in \mathbb{R}$, prove que o intervalo $(-\infty, b)$ possui infinitos elementos.

Consideramos agora uma sequência (infinita) de intervalos fechados, $I_k = [a_k, b_k]$ tais que $I_k \subseteq I_{k-1}$ e $b_k - a_k = \dfrac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$. Na igualdade anterior, o número 2, que aparece pela primeira vez, é definido por $2 = 1+1$, assim como todos os números inteiros usados para "contar" os intervalos são definidos como somas de 1. Observe que, acima, se o primeiro intervalo da sequência é denotado por $I_0 = [a_0, b_0]$ temos $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$.

Uma família de intervalos I_k como acima é chamada *família de intervalos encaixantes.*

Axioma de continuidade. Dada uma sequência (infinita) de intervalos encaixantes I_k como acima, existe e é único um elemento de $\mathbb{R}$ que pertence a todos os I_k.

Definição 17. Dado $a > 0$, se existe um número real $b > 0$ tal que $b^2 = a$, chamamos b de *raiz quadrada* de a.

Usando o axioma de continuidade poderiamos provar que cada a positivo (ou seja > 0) possui raiz quadrada. Porém a prova será feita depois da introdução das funções contínuas.

Exercício 36. Usando as propriedades algébricas dos números reais, prove que a raiz quadrada de $a > 0$, se existir, é única.

O Axioma de Arquimédes pode ser não dificilmente provado usando o Axioma de continuidade também nesta versão.

Não tudo é resolvido. Três problemas interessantes, que não tenho o tempo material agora de aprofundar, aparecem. O primeiro é: se $\mathbb{R}$ for definido dessa forma abstrata, quem garante que de fato existe? Segunda questão: posto que $\mathbb{R}$ exista, é o único sistema numérico que verifica os 11 axiomas algébricos e o Axioma de Continuidade? E finalmente: posto que às duas questões acima seja possível dar resposta afirmativa, como eu consigo identificar em $\mathbb{R}$ os números inteiros positivos? Se consigo isso obtenho automaticamente $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. E portanto os números irracionais. Mas como defino $\mathbb{N}$? Eu poderia talvez tentar dizer que 1 é natural (1 é identificado como neutro do produto, portanto se sabe quem é). 1+1 é natural e continuando assim. Agora o "continuando assim" não é tão óbvio. E todas essas perguntas são interessantes e não simples e mereceriam o tempo que eu gostaria ter e não tenho para responder aqui.

Fim do intermezzo

As funções: definição e propriedades básicas; as funções elementares.

Definição 18. Dados A e B conjuntos quaisquer, uma *função* $f : A \to B$ é una lei que a cada elemento de A associa um e só um elemento de B.

Definição 19. A se chama *domínio* da função, B é dito *contradomínio.* O conjunto dos valores atingidos por f se chama *imagem* de f, denotado por $\operatorname{Im}(f)$ ou $f(A)$. Ou seja:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

$\operatorname{Im}(f)$ é um subconjunto do contradomínio (pode ser igual). Se $C \subseteq A$, definimos a imagem de C por meio de f como o conjunto

$$f(C) = \{y \in B : \text{ existe } x \in C \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Dados dois conjuntos A e B, o *produto cartesiano* entre A e B é um novo conjunto, que denotamos pelo símbolo $A \times B$ definido por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Agora podemos definir o *gráfico* de $f : A \to B$, $G(f)$, como

$$\{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}.$$

Observação 20. O leitor deve perceber que a definição de gráfico é uma definição técnica: um gráfico não é um genérico desenho, mas é um conjunto, definido com precisão e que depende de uma função dada. Outra coisa é tentar desenhar o gráfico (coisa, em princípio, que pode ser interessante para entender o comportamento de uma função).

6. Quinta-feira, 14 de março de 2024

Consideramos como conhecidas pelo leitor as funções polinomiais e os quocientes de polinômios. Se, em um exercício, aparece uma função sem que seja denotado explicitamente o domínio, consideramos implicitamente que o domínio é o maior conjunto possível onde a função pode ser definida. Por exemplo, se encontramos $f(x) = x^2$, entendemos que o domínio é $\mathbb{R}$. Por outro lado, a notação $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ indica uma função definida somente em $[0, 1]$. O leitor deve perceber que estas f e g são duas funções diferentes.

Definição 21. **(de raiz n-esima.)** Dados um número inteiro $n \geq 1$ e um número real não negativo x, a raiz enésima de x, em símbolos $\sqrt[n]{x}$, é o número não negativo y tal que $y^n = x$.

Exercício 37. Prove que, dado $x > 0$, a raiz quadrada de x é única (sugestão: usar a propriedade que liga o ordenamento e o produto, que é a propriedade que diz o seguinte: dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, e dado $c > 0$, então vale $ac \leq bc$). O que significa este exercício? Pegamos π por exemplo (conhecemos π como o valor da área do disco de raio 1, por exemplo). Temos certeza de que existe um número real (e positivo) a tal que $a^2 = \pi$? a resposta é sim, mas a prova não é óbvia. Iremos provar este fato mais para frente, usando propriedades das funções contínuas. Pelo contrário, o exercício que pede a unicidade da raiz é muito mais simples: pede ao leitor provar que, se existem a e b reais e positivos tais que $a^2 = b^2$, então deve ser $a = b$.

Vamos resumir a questão da existência da raiz no teorema que vem. Que será provado, como dito no exercício acima, depois da introdução do conceito de função contínua. Entretanto, iremos usar a raiz n-ésima aceitando sua existência.

Teorema 22. *Dados um número inteiro $n \geq 1$ e um número real não negativo x, existe um número não negativo y tal que $y^n = x$.*

Graças ao exercício 37 e ao teorema 22, é corretamente definida a função raiz $n$ésima.

A raiz enésima de x, no caso em que n seja impar, pode ser estendida aos números reais negativos. Se n é impar e $x < 0$, podemos dar duas definições equivalentes: *(a)* a raiz enésima de x será aquele número negativo y tal que $y^n = x$; *(b)* a raiz enésima de x será aquele número negativo y obtido como $y = -\sqrt[n]{-x}$, onde o valor $\sqrt[n]{-x}$ é obtido pela definição 21 (observe que $-x$ é positivo).

Assim a a raiz enésima de x será uma função definida em tudo $\mathbb{R}$ se n for impar.

Definição 23. Dado un número real a, definimos *módulo* (ou *valor absoluto*) de a número não negativo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Exercício 38. Prove as *desigualdades triangulares* seguintes: para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \qquad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

7. Segunda-feira, 18 de março de 2024

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas intuitivamente a partir da construção clássica que se baseia na circunferência de $\mathbb{R}^2$ centrada na origem e de raio 1. Assim o domínio de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ será $\mathbb{R}$, o domínio de $\operatorname{tg} x$ será $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Além disso, cabe lembrar que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π, ou seja

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A tangente é periódica de período π. Além disso, sempre devido à construção geométrica que aqui não vamos aprofundar, é possível provar que seno e tangente são impares, ou seja:

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

equanto cosseno é par, ou seja

$$\cos x = \cos(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Será importante lembrar os valores de seno, cosseno e tangente de alguns arcos importantes: 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ e os correspondentes deles nos outros quadrantes. Inclusive, as fórmulas de soma (e as imediatas consequências delas) serão importantes: $\operatorname{sen}(a + b)$ e $\cos(a + b)$.

Concluimos lembrando a fórmula mais importante de toda a trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

que depende diretamente da definição de seno e cosseno.

Exercício 39. A partir das fórmulas (que o leitor provavelmente conhece)

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a, \quad e \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

calcule $\operatorname{sen}(a - b)$ e $\cos(a - b)$.

Vamos lembrar aqui, sem dar a prova que pode ser obtida usando a ferramenta clássica da geometria euclidiana, as assim chamadas *fórmulas de prostaférese* (que o leitor não precisa minimamente lembrar). Serão utilizadas para calcular os limites das funções seno e cosseno.

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}.$$

Alguns exercícios.

Exercício 40. Escrever a união e a interseção do seguinte par de conjuntos A e B. Dizer se vale a relação $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Determinar enfim $A \backslash B$ e $B \backslash A$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 4} \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\}.$$

Exercício 41. Resolver as inequações seguintes.

1. $x^2 - 2x - 1 \leq 0$	*2.* $3x^2 - x + 2 > 0$
3. $\dfrac{x-2}{x+1} > \dfrac{1}{x-1}$	*4.* $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+1} \leq \dfrac{1}{2}$
5. $x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 > \dfrac{1}{4}$	*6.* $x^2 \leq 1$
7. $\dfrac{2}{x} + 3 < \dfrac{4}{x} - 1$	*8.* $\dfrac{3}{x^2} + 1 \leq x^2 - 1$
9. $\sqrt{x-1} < x - 3$	*10.* $\sqrt{x^2+2x-1} > 3 - x$
11. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x}$	*12.* $\lvert x^2 - 4x - 5\rvert > -x$
13. $\sqrt{-x} < 5 + x$	*14.* $\lvert -6x + 3\rvert > -x + 2$

Exercício 42. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subseteq B$. Prove que $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$.

Exercício 43. Seja $A = \bigcup_{n\geq 2} A_n$, onde, para cada n, $A_n = \left(-1 - \dfrac{1}{2n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$. Determine supremo, ínfimo, e (se existem) máximo e mínimo.

Concluo com um esclarecimento sobre o conceito de intervalo (não vou tratar na aula em detalhes). Dados a e b reais, temos quatro tipos de *intervalos* de *extremos* a e b:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \qquad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

O primeiro é dito fechado, o quarto é dito aberto. Os *intervalos ilimitados* são os seguintes:

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \qquad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \qquad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Exercício 44. Considere a seguinte definição de intervalo: *I é um intervalo de $\mathbb{R}$ se (e somente se) para todo $x, y \in I$, com $x < y$ e para todo z tal que $x < z < y$, então $z \in I$.* Essa definição é equivalente à definição acima, mais detalhadas, que coloca os vários casos?

Sejam duas funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, tais que $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq B$. Definimos *função composta* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$, a função

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Analogamente, se $\mathrm{Im}\, g \subseteq A$, definimos $f \circ g : B \to \mathbb{R}$ como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Exercício 45. Escreva as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ das funções seguintes, determinando os domínios das funções obtidas.

1. $f(x) = x + x^3, \quad g(x) = 3 - x$

2. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$

4. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^2 + 1$

5. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = 2 - x^2$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = (\operatorname{tg} x)^2$

7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = 2 - x^2$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{x}, \quad g(x) = 2 - x$

10. $f(x) = 2^{[x]}, \quad g(x) = 3x - 1$

No item 10 acima, o símbolo $[x]$ se chama *parte inteira* de x e significa o maior inteiro relativo que não ultrapassa x. Por exemplo: $[4] = 4$, $[5/2] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-1/3] = -1$, etc.

Exercício 46. Escreva as funções seguintes como composição de funções. (As composições obtidas podem não ser as únicas possíveis.)

1. $x^2 \operatorname{sen} x^2$

2. $\sqrt{1+x}$

3. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

4. x^4

Definição 24. Uma função é dita *limitada* (*superiormente, inferiormente*) se a imagem dela é limitada (superiormente, inferiormente). Neste caso o *supremo* (*ínfimo*) de f, $\sup f$ ($\inf f$) é, por definição, o supremo (ínfimo) de $\operatorname{Im}(f)$.

Definição 25. Uma função $f : A \to B$ é dita *injetora* se, para todos $a, b \in A$, tais que $a \neq b$, temos $f(a) \neq f(b)$. É dita *sobrejetora* se $\operatorname{Im}(f) = B$. Se f é injetora e sobrejetora é chamada *bijetora* (ou *correspondência biunívoca*).

Uma função injetora é também chamada *inversível.* Não interessa que seja sobrejetora.

Definição 26. Se $f : A \to B$ é injetora, definimos a *função inversa* de f como a função $g : \operatorname{Im}(f) \to A$ que associa a cada $y \in \operatorname{Im}(f)$ o único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. A função inversa é denotada, em geral, por f^{-1}. Em outras palavras, a função inversa, denotada por f^{-1} é definida em $\operatorname{Im}(f)$ e verifica $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo $x \in \operatorname{Im}(f)$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in A$.

Definição 27. Sejam A, B dois conjuntos, e $f : A \to B$ uma função dada. Dado um subconjunto C de B, o conjunto $\{x \in A : f(x) \in C\}$ é chamado *imagem inversa* de C.

Observação 28. Cuidado em não fazer confusão entre a <u>imagem inversa</u> (de um conjunto) que sempre é um conjunto e a <u>função inversa</u>, quando existe, que é uma função. A notação não ajuda, sendo f^{-1} o mesmo símbolo para os dois conceitos.

Exercício 47. Dadas as funções seguintes, determine a imagem inversa dos conjuntos indicados ao lado. Tente intuitivamente justificar a resposta.

1. $2-x, \quad (-10,3]$	*2.* $x^2-x+3, \quad (0,5)$
3. $\dfrac{x}{x-2}, \quad \mathbb{R}$	*4.* $\sqrt{\lvert x-1\rvert}, \quad [0,1]$
5. $[1+x^2], \quad (1,4)$	*6.* $\operatorname{sign}(x^2-2), \quad (1/2,2)$

Exercício 48. Dadas as funções seguintes, onde o domínio é indicado ao lado, calcule as funções inversas determinando os domínios relativos.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad (-\infty, 0)$ *2.* $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Alguns exemplos e observações.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, não é uma função. De fato, para cada $x < 0$, $\sqrt{x}$ não existe.

(2) Pelo contrário, é bem definida a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. $\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty)$.

(4) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. O domínio e a imagem desta função são diferentes dos aqueles do exemplo anterior. Se duas funções têm domínios diferentes são duas funções, mesmo possuindo a mesma lei.

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Esta função é uma *extensão* de $1/x^2$ a tudo $\mathbb{R}$. Para obter uma extensão, precisa escolher um valor $f(0)$. Tal valor será necessáriamente uma escolha e não poderá, no caso acima, ser dado por $1/0$.

(6) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2-5 & \text{se } 3 < x < 4 \\ -3 & \text{se } x = 4. \end{cases}$

A f acima é <u>uma única</u> função. Não temos, em outras palavras, três funções. O leitor reflita sobre este fato. O leitor também discuta como exercício uma afirmação que várias vezes se encontra em sala de aula, "f é constante em $x = 4$". Diga porque tal afirmação não faz nenhum sentido.

Exercício 49. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada *par* se $f(x) = f(-x)$, para todo x. É chamada *impar* se $f(x) = -f(-x)$, para todo x. Prove que x^2+1 é par e que $\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$ é impar.

Exercício 50. Complete a terceira coluna da tabela dizendo se o resultado é uma função par, impar, ou nenhuma da duas coisas.

f par	g par	$f+g$?	$f \cdot g$?	$f \circ g$?	$g \circ f$?
f impar	g par	$f+g$?	$f \cdot g$?	$f \circ g$?	$g \circ f$?
f impar	g impar	$f+g$?	$f \cdot g$?	$f \circ g$?	$g \circ f$?
f impar		$1/f$?	f^{-1}?		
f par		$1/f$?	f^{-1}?		

Exercício 51. A soma de duas funções inversíveis é inversível? o produto? a composição?

Dada $f : E \to \mathbb{R}$ e dado um suconjunto B de E, a função $g : B \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in B$ é dita *restrição* de f em B, o símbolo é $f|_B$.

Funções monótonas

Definição 29. Dada uma função $f : E \to \mathbb{R}$:

(1) f é dita *crescente* se, para cada x_1, x_2 em E, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.
(2) f é dita *estritamente crescente* se para cada x_1, x_2 em E, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.
(3) f é dita *decrescente* se, para cada x_1, x_2 em E, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \geq f(x_2)$.
(4) f é dita *estritamente decrescente* se para cada x_1, x_2 em E, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

As funções acima são chamadas de *monótonas*. Vale a pena observar que uma função estritamente crescente é também (e obviamente) crescente. O vice-versa não vale.

Exercício 52. Estudar a monotonia das funções seguintes:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
(2) $f : [2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$,
(3) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
(4) $f : (-\infty, -2)$, $f(x) = \sqrt{-x}$,
(5) $f[-5, -4] \cup [1, 2]$, $f(x) = 1/x$.

Exercício 53. Desenhar intuitivamente os gráficos das funções acima.

Exercício 54. Provar que a soma e de duas funções crescentes é uma função crescente. A composição de duas funções crescentes é uma função crescente? E o produto?

Exercício 55. Determine, para cada função seguinte, o maior domínio onde é inversível.

1. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Exercício 56. Prove que uma função estritamente crescente ou decrescente é inversível. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é inversível, necessariamente é estritamente monótona? Procure exemplos.

Exercício 57. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$ é inversível?

Exercício 58. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^3$ é inversível?

Exercício 59. A função $f : [-3, -2] \cup [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$ é inversível?

Exercício 60. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sqrt{|x|}$ é inversível?

Exercício 61. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sqrt{x^3 + x^4 + 2}$ é inversível?

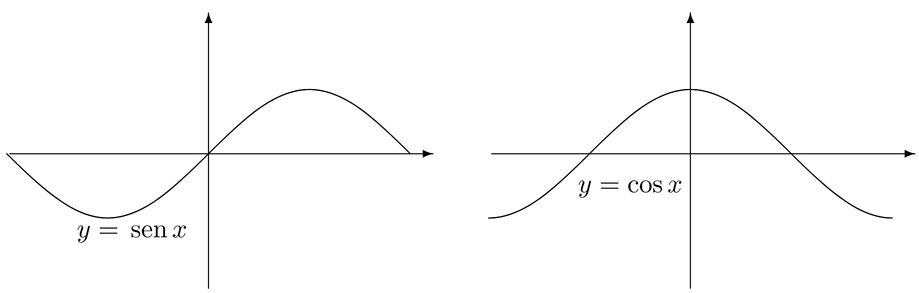
Exercício 62. Determine $\operatorname{sen} 2x$ e $\cos 2x$ em função de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (fórmulas de duplicação). Determine $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$ e $\cos \dfrac{x}{2}$ em função de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (fórmulas de divisão).

Exercício 63. Provar que a tangente é periódica com período π. Dica: use as fórmulas de duplicação, sabendo também que seno e cosseno são periódicas de período 2π.

As funções trigonométricas não são inversíveis (porque são periódicas e portanto não são injetoras). Porém, observamos por meio da construção geométrica das funções trigonométricas, feita através da circunferência trigonométrica, que $\operatorname{sen} x$ é estritamente crescente em $[-\pi/2, \pi/2]$. Então, a restrição de $\operatorname{sen} x$ a $[-\pi/2, \pi/2]$ é inversível. A sua função inversa se chama *arcosseno*, $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. A imagem de arcsen é $[-\pi/2, \pi/2]$.

Analogamente, $\cos x$ è inversível em $[0, \pi]$. A sua função inversa se chama *arcocosseno*, $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, com imagem $[0, \pi]$.

A tangente è inversível em $(-\pi/2, \pi/2)$. A sua função inversa se chama *arcotangente*, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e tem imagem $(-\pi/2, \pi/2)$.



graficos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$.

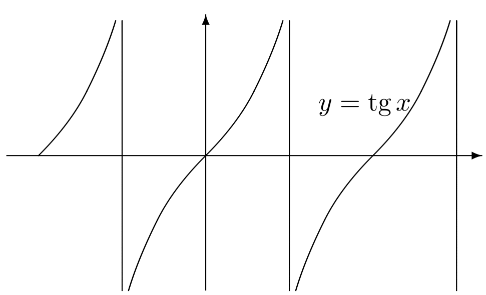
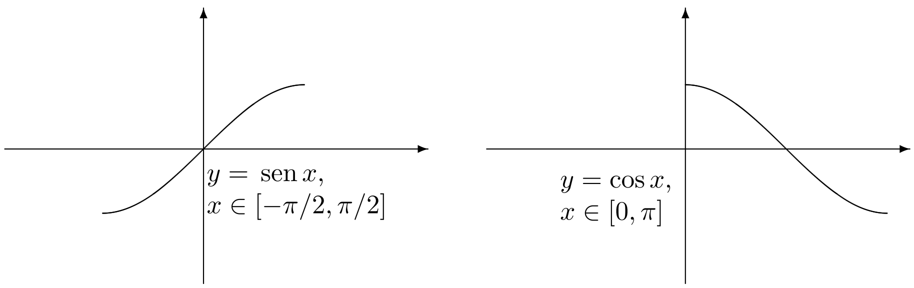


gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Aqui em baixo os gráficos das restrições inversíveis de seno, cosseno e tangente. O leitor poderia observar que os domínios escolhidos não são os únicos onde as funções são inversíveis. Seno, por exemplo, é inversível também em $[2\pi, 2\pi + \pi/2]$. É verdade. A escolha dos domínios acima é feita unicamente para simplificar as contas.



graficos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ restringidos.

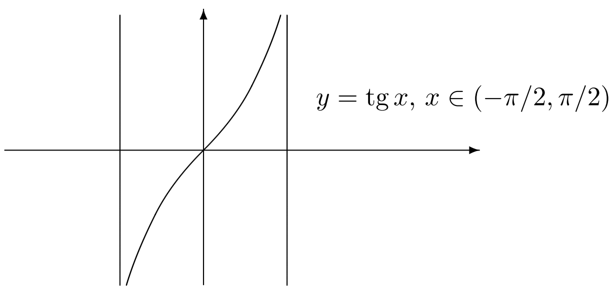
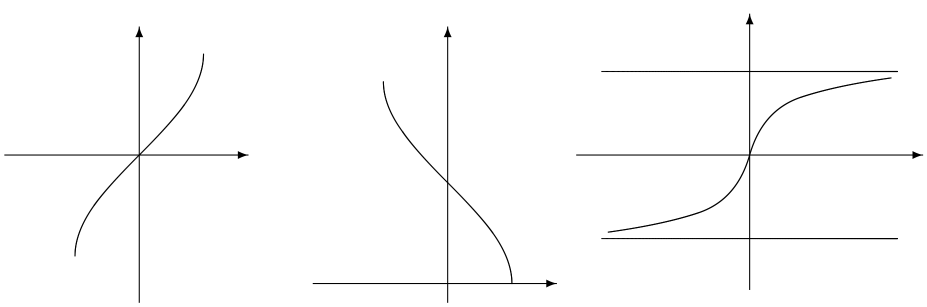


gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$ restringida.

Agora os gráficos das funções trigonométricas inversas.



gráficos de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $f(x) = \arccos x$ e $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Exercício 64. Considere $f : [\pi/2, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Verifique (sempre empiricamente, trabalhando na circunferência trigonométrica) que é inversível. Assim determine a inversa de f. Não esqueça determinar $\operatorname{Im}(f)$ que será o domínio da inversa. Observe que tal inversa será uma função *do tipo arcsen*, mas não poderá ser <u>exatamente</u> arcsen. Diga porque.

Exercício 65. Faça o mesmo exercício com $f : [-\pi/2, 0] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.

Exercício 66. Desenhe o gráfico de $f(x) = [2x + 1]$ (parte inteira).

Exercício 67. **(difícil)** Desenhe o gráfico de $f(x) = 1 + 2\left[\dfrac{x}{1 + x^2}\right]$ (parte inteira).

Exercício 68. Diga se as funções seguintes são periódicas. Se sim, encontre o período (uma função f é periódica de período $T \in \mathbb{R}$ se $f(x) = f(x + T)$ para todo x).

1.	$x\cos x$,	*2.*	$6\,\mathrm{sen}^2 x$,
3.	$1+\mathrm{tg}\, x$,	*4.*	$\mathrm{sen}\,(x^2)$,
5.	4,	*6.*	$[x]$,
7.	$\cos 4x$,	*8.*	$\mathrm{sen}\,(3x)$.

Exercício 69. Diga se as funções seguintes são pares ou impares.

1.	x^2+1,	*2.*	$\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{x}$,
3.	$\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$,	*4.*	$[x]$,
5.	$\mathrm{sen}\, x^2$,	*6.*	$\cos 3x$.

8. Terça-feira, 19 de março de 2024

Uma outra família importante de funções é formada pelas potências com expoente não necessariamente natural. Se n é inteiro, $n \geq 1$, sabemos que existe e é única a raiz n-esima de x (veja-se o teorema 22). Inclusive, tal raiz é única (exercício 37). Portanto é definida a função $\sqrt[n]{x}$. Se n é par, o domínio é $[0,+\infty)$, se n é impar, o domínio é $\mathbb{R}$. A raiz $\sqrt[n]{x}$ pode ser denotada pelo símbolo $x^{\frac{1}{n}}$.

Dado um racional positivo qualquer, m/n, onde m e n são primos ente si, é definida a função $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, cujo domínio é $[0,+\infty)$ se n é par, enquanto é $\mathbb{R}$ se n é impar.

Dado um racional negativo, m/n, onde $m,n \in \mathbb{Z}$ são primos ente si, é definida a função $x^{m/n} = \dfrac{1}{x^{-m/n}}$, cujo domínio é $(0,+\infty)$ se n é par, enquanto é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ se n é impar.

Se x é um número real diferente de zero, é também definida a potência x^0 e vale $x^0=1$.

Exercício 70. Escreva em detalhes o processo resumido acima. Ou seja, a construção das potências com expoente racional a partir das potências com expoente inteiro e positivo, passando por: (a) a definição da potência com expoente zero, (b) a definição da potência com expoente inteiro negativo, (c) a definição da potência com expoente racional, positivo ou negativo.

Exercício 71. Determine para quais valores do expoente r racional a função x^r pode ser definida em tudo $\mathbb{R}$.

Exercício 72. Explique quais problemas provocaria a definição $0^0=1$. *Sugestão: algumas das propriedades das potências seriam ainda satisfeitas, mas não todas; diga por exemplo qual.*

Exercício 73. Seja a positivo, real, fixado e diferente de 1. Considere a função $f(r)=a^r$, definida em $\mathbb{Q}$. Prove que

(1) f é estritamente crescente se $a>1$;
(2) f é estritamente decrescente se $a<1$.

Como pode ser abordado o exercício? Se trata de provar que, dados $r_1 = p/q$, $r_2 = m/n$, com $r_1 < r_2$ e $a > 1$, então temos $a^{r_1} < a^{r_2}$. Essa desigualdade se baseia na propriedade OP (ordenamento com produto).

Agora, continuando a construção feita até agora e usando o exercício precedente, podemos finalmente dar a definição das potências com expoente real (de fato, irracional, porque se o expoente for racional, acabamos de fazer a construção). Ou seja podemos definir 2^π, por exemplo. O método é o seguinte. Sejam $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, fixados. Suponhamos primeiramente que a seja maior de 1. Definimos

$$a^b = \sup\{a^r : \ r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq b\}.$$

Se for $0 < a < 1$, definimos analogamente

$$a^b = \inf\{a^r : \ r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \geq b\}.$$

Exercício 74. Porque é importante o exercício 73 para as definições acima?

Exercício 75. Definições muito muito parecidas poderiam ser dadas. Quais?

Podemos provar, mas é um exercício longo e cansativo, que as potências com expoente real verificam as clássicas propriedades das potências, que daqui para frente serão normalmente usadas quando for necessário.

Exercício 76. (não fácil.) O leitor prove que $f(x) = a^x$ (domínio $= \mathbb{R}$) é:

(1) estritamente crescente se $a > 1$,
(2) estritamente decrescente se $0 < a < 1$.

O exercício acima é difícil. O leitor tente explicitar as dificuldades.

Exercício 77. Prove que, dada uma constante real α, a função $g(x) = x^\alpha$ (domínio $= (0, +\infty)$) é:

(1) estritamente crescente se $\alpha > 0$,
(2) estritamente decrescente se $\alpha < 0$.

O exercício acima também é difícil. Fica um pouco mais acessível se limitamos a investigação aos expoentes racionais. Neste caso, ajuda começar por uma função bem simples como x^2 limitada a $(0, +\infty)$. Se trata de provar que ela crescente, usando a propriedade OP (ordenamento com produto).

Assim, deve-se provar que a inversa de uma função crescente também é crescente. Em particular, $\sqrt{x}$ é crescente. Um outro passo consiste em estudar crescimento ou decrescimento de x^k, quando k é inteiro relativo. E finalmente concluir o exercício com o caso do expoente racional. Resumindo, a propriedade OP é a base de tudo e precisa somente um pouco de paciência.

Exercício 78. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função inversível. Suponha que f seja estritamente crescente. Prove que a inversa também é estritamente crescente.

Como dito acima, a função exponencial a^x é inversível, onde (sempre ajuda repetir, para não fazer confusão) a deve ser positivo (claramente $\neq 1$) e x pode ser real qualquer, e portanto a exponencial é definida em tudo $\mathbb{R}$. A função inversa se chama *logarítmo*. Em particular, dado a, o símbolo da inversa é $\log_a x$ que deve ser lida como "logarítmo em base a de x". Existe um número muito particular, chamado e, que é uma constante matemática que foi destacada a partir do começo do século de 1600, com os primeiros estudos sobre os logarítmos, e que se tornou de enorme importância a partir do século seguinte. Se trata de um número transcendente, que significa que não pode ser raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros, e portanto irracional. Se coloca entre 2,71 e 2,72. Existem várias definições equivalentes de e. A mais famosa é provavelmente a seguinte: considere a sequência de números racionais

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$$

Qual é o comportamento da sequência quando n cresce? a resposta não é tão fácil. Observe o seguinte: a base da potência é sempre maior de 1, mas si torna próxima de 1 enquanto n cresce. Se o expoente fosse fixado, o resultado da potência tenderia a 1. Por outro lado o expoente cresce e, se a base fosse fixada, sendo maior de 1, o resultado da potência tenderia a crescer indefinidamente. Em outras palavras, é como se tivesse um conflito entre bases e expoentes. Os dois empurram em direções muito diferentes. Tem um ponto de equilíbrio? Sim.

Primeiro, pode-se provar que a sequência cresce estritamente enquanto n cresce (a prova não é fácil). Segundo pode-se provar que o conjunto dos valores da sequência é limitado (a prova também não é fácil). Portanto a sequência não tem máximo, mas tem supremo finito. Tal supremo é um número que está entre 2 e 3 e que é chamado de e.

A função exponencial e^x tem propriedades muito particulares, a respeito das outras exponenciais. A inversa é denotada pelo símbolo $\log x$, sem necessidade de escrever a base e ao lado de log.

Observação 30. *Eu uso o símbolo* $\log x$ *no lugar de* $\ln x$. *O aluno que está mais acostumado com o símbolo* $\ln x$*, pode continuar assim sem problemas.*

Observação 31. Em sala de aula foi dada uma outra definição de e, a partir da área de uma particular porção do subgráfico da função $1/x$.

Os limites

Durante a aula foi discutida de forma intuitiva uma possível introdução ao conceito de limite de uma função. A seguinte é a definição rigorosa no caso de limite finito em um ponto.

Primeiro tipo de limite: limite finito.

Definição 32 (limite finito). Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $c \in I$. Seja $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ uma função dada. O número real l é dito *limite* de $f(x)$ para x que tende a c, em símbolos escreve-se

$$\lim_{x \to c} f(x) = l,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para cada $x \in I$, tal que $0 < |x - c| < \delta$.

Observação 33 (importante). Em todo o capítulo sobre os limites, quando dizemos, como acima, que f é definida em $I \setminus \{c\}$, não significa necessariamente que f é definida *somente* em $I \setminus \{c\}$, excluindo portanto c.

Aqui fica mais prático considerarmos f como definida *pelo menos* em $I \setminus \{c\}$. Porque esta escolha? *O conceito de limite nasce para esclarecer a ideia intuitiva de* **analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de um valor c sem levar em conta quanto a função vale em c, nem se ela é alí definida**. *Em outras palavras, este ponto c pode não pertencer ao domínio, ou pode ser que $f(c)$ seja muito diferente do comportamento de $f(x)$ avaliada "nos pontos próximos de c".*

Exercício 79. Prove, usando a definição 32, que os limites seguintes são corretos. *Os exercícios seguintes são muitos. Resolva somente um ou dois; já é um bom resultado.*

1. $\lim_{x\to 2} 3x = 6$
2. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
3. $\lim_{x\to 3} x = 3$
4. $\lim_{x\to 0} (x^2 - 1) = -1$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ não é igual a 1
6. $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$
7. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$
8. $\lim_{x\to 2} [x]$ não é igual a 2.
9. $\lim_{x\to -1} -x^2 = -1$
10. $\lim_{x\to 0} x^2/|x| = 0$

Exercício 80. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ x+3 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Prove que o limite de $g(x)$ quando $x \to 2$ não é 4.

9. Quinta-feira, 21 de março de 2024

Geralmente é complicado usar a definição de limite para provar que uma função $f(x)$ não possui limite para $x \to c$, porque se trata de verificar que nenhum real l é limite de f quando $x \to c$. Um exercício mais simples é provar que é um certo valor considerado não é limite de f quando $x \to c$, como no exercício 80.

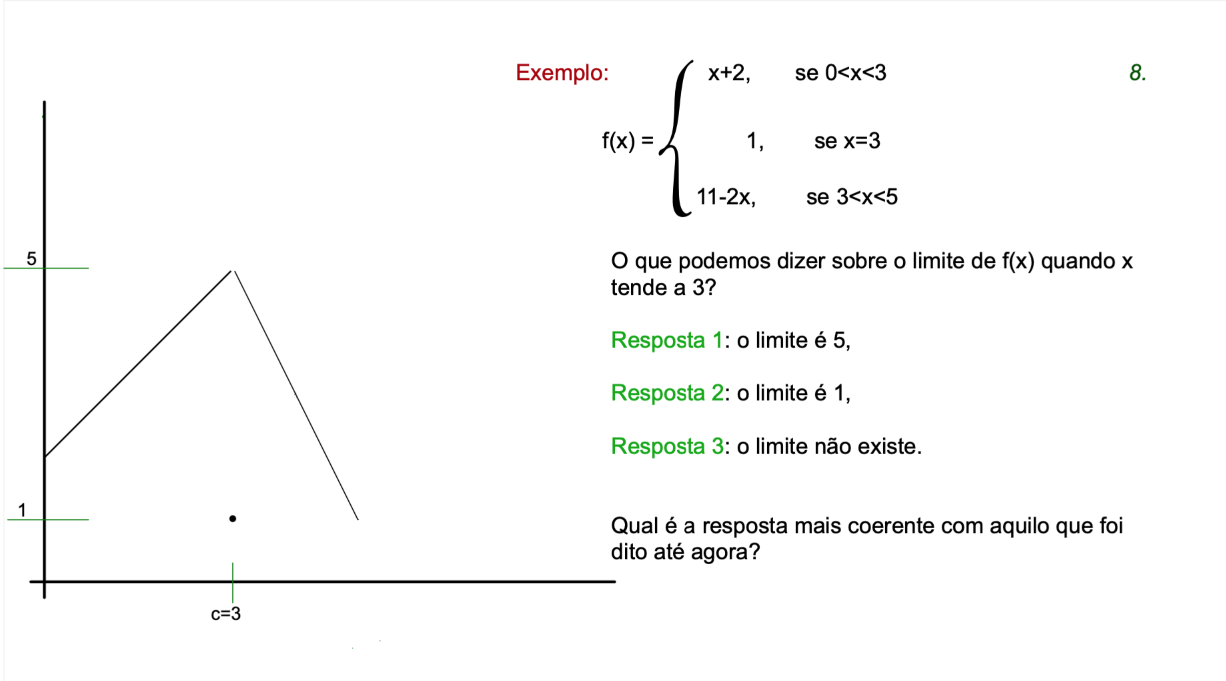
Exercício 81. Considere a função $f(x) = \cos(1/x)$, definida para todo x real e não nulo. Estude o comportamento dela e tente justificar intuitivamente que o limite de $f(x)$ para x que tende a zero não pode ser zero. Tente, em seguida, provar rigorosamente que, de fato, o limite não é zero.

Exercício 82. Pegue a frase que define o limite (na definição 32): *para todo* $\varepsilon > 0$, *esiste* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x)-l| < \varepsilon$ *para cada* $x \in I$, *tal que* $0 < |x-c| < \delta$. Escreva a negação lógica dessa frase. A negação lógica da frase é aquilo que serve para fazer os exercícios onde precisa provar que um certo número não é limite de uma função.. Lembre que alguns exercícios das aulas anteriores trataram a negação lógica de frases.

Em uma das próximas aulas serão apresentados os conceitos de limite lateral direito e esquerdo. Eles se usam, entre outras coisas, para provar que um limite não existe.

Exercício 83. Considere a função $f(x) = 1/x^2$, definida para todo x real e não nulo. Prove que para todo $M \in \mathbb{R}$, esiste $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para cada x tal que $0 < |x| < \delta$. Este exercício antecipa um outro tipo de limite que será tratado mais para frente.

Exercício 84.



Exercício 85. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Prove, usando a definição de limite, que o $\lim_{x \to 1} f(x)$ não é 0 e prove que não é 1. *Observação: se por um lado sabemos usar ε e δ a direita de 1, ou seja, quando $f(x) = x$, o mesmo não conseguimos ainda fazer a respeito de $\cos(\pi x)$, porque ainda não abordamos os limites das funções trigonométricas. Mesmo assim, propriedades mais básicas da função cosseno são suficientes para resolver o exercício.*

Se torna bastante intuitivo imaginar que, se uma função tem limite igual a um valor real l, quando x tende a c, a mesma f não possa ter um outro limite $m \neq l$, quando x tende ao mesmo c. Contudo, a definição não diz isso. Precisa o teorema seguinte. A demonstração não foi feita em sala de aula.

TEOREMA 34 (unicidade do limite). *Seja $f(x)$ uma função dada. Se ela possui limite para $x \to c$, ele é único.*

Demonstração. Suponhamos $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Seja agora $m \in \mathbb{R}$, diferente de l, tal que $\lim_{x \to c} f(x) = m$. Sem perder em generalidade, suponhamos $l > m$. Seja agora $\varepsilon > 0$ menor de $(l - m)/2$. Por exemplo $\varepsilon = (l - m)/3$. Assim, $l - \varepsilon > m + \varepsilon$. Pela definição de limite, valem os seguintes fatos (A) e (B):

(A) existe $\bar{\delta}' > 0$ tal que, para todo $x \in I$, tal que $0 < |x - c| < \bar{\delta}'$, temos $f(x) > l - \varepsilon$.
(B) existe $\bar{\delta}'' > 0$ tal que, para todo $x \in I$, tal que $0 < |x - c| < \bar{\delta}''$, temos $f(x) < m + \varepsilon$.

Escolhendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, as condições (A) e (B) acima, são satisfeitas para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I \setminus \{c\}$. Consequência delas é

$$l - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon,$$

para os mesmos valores de x. Isso implica $l - \varepsilon < m + \varepsilon$ que é contraditório com a escolha inicial de ε. $\square$

As próximas páginas são dedicadas ao cálculo dos limites de algumas das mais importantes funções elementares. Começamos pela proposição seguinte

Proposição 35. *Seguem diretamente da definição os limites seguintes:*

$$\lim_{x\to c} x = c, \qquad \lim_{x\to c} a = a,$$

onde a é a função constante $f(x) = a$.

Exercício 86. Prove a proposição anterior usando apenas a definição de limite.

O seguinte resultado é uma ferramenta importante que permite obter muitos resultados. A partir dos dois limites oferecidos pela proposição acima e do teorema seguinte, todos os limites de polinômios e funções racionais (quocientes de polinômios) podem ser obtidos usando a álgebra dos limites, com a única exceção dos casos em que o limite do quociente é zero. Estes casos precisam ser tratados a parte. Veremos nas próximas aulas.

Teorema 36 (álgebra dos limites - formas finitas). *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $c \in I$ dado. Sejam $f, g : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ duas funções dadas. Sejam dados os limites*

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbb{R}, \qquad e \qquad \lim_{x\to c} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Então,

(1) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = l + m$ *(soma);*

(2) $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = l - m$ *(diferença);*

(3) $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$ *(produto);*

(4) $\lim_{x\to c}(f(x)/g(x)) = l/m$*, se* $m \neq 0$ *(quociente).*

Demonstração. Vamos dar a demonstração do caso (1) do teorema, conforme feito em sala de aula. O caso (2) é praticamente idêntico.

Seja $\varepsilon > 0$ fixado.

Queremos provar que existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I$ e $x \neq c$, então,

$$l + m - \varepsilon < f(x) + g(x) < l + m + \varepsilon.$$

Vamos usar as hipóteses. O número $\varepsilon > 0$ acima é fixado. Então, existem δ_1 e δ_2 positivos tais que,

$$\text{se } x \in (c - \delta_1, c + \delta_1) \cap I \text{ e } x \neq c, \text{ então } l - \varepsilon/2 < f(x) < l + \varepsilon/2, \tag{1}$$

$$\text{se } x \in (c - \delta_2, c + \delta_2) \cap I \text{ e } x \neq c, \text{ então } m - \varepsilon/2 < g(x) < m + \varepsilon/2. \tag{2}$$

Se pegamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então, as desigualdades acimas são ambas verificadas se $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I$ e $x \neq c$, e portanto, somando, há

$$l + m - \varepsilon < f(x) + g(x) < l + m + \varepsilon.$$

□

Exercício 87. O leitor tente replicar sozinho a demonstração acima. Tente explicar porque é correta a colocação de $\varepsilon/2$ nas (1) e (2) no lugar de ε. Para o caso 3 veja o exercício 89. O 4 é um pouco mais difícil.

Exercício 88. O método para provar a (2) do teorema, a diferença, é muito parecido. Pode tentar sem particular dificuldade.

Exercício 89. Tente verificar a fórmula do teorema relativa ao limite do produto. Neste caso é bom usar a sugestão acenada em sala da aula, ou seja, fixado $\varepsilon > 0$, tratar

$$-\varepsilon < f(x)g(x) - lm < \varepsilon$$

como

$$-\varepsilon < f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm < \varepsilon$$

pare estudar, em seguida e separadamente

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x)g(x) - f(x)m < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\varepsilon}{2} < f(x)m - lm < \frac{\varepsilon}{2}$$

Exercício 90. Calcule os limites seguintes (se existem).

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-3}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x+3}{4x^2-2x+1}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{2x+x^2}{2x^2+x-1}$

Daqui para frente, no caso em que seja enfrentado o limite $\lim_{x\to c} P(x)$ onde P é um polinômio, podemos sempre e tranquilamente dizer que o limite vale o valor do polinômio no ponto, ou seja, $P(c)$.

Exercício 91. Nos três limites seguintes (que por enquanto não sabemos se existem) a álgebra dos limites não pode ser diretamente aplicada. Reflita sobre as dificuldades de abordar os três casos e pense em qual poderia ser uma saída.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+2x-8}{x^2-4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.